

1. Δίνονται στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία $z_1 := -2 + i$ και $z_2 := 3 + 2i$. Χρησιμοποιώντας μόνο γεωμετρικό τρόπο, να προσδιοριστούν άμεσα τα σημεία $z_1 z_2$, και z_1 / z_2 . [0.5]
2. α) Να εξηγήσετε τι σημαίνει "χορδωκή απόσταση" $\chi(\cdot, \cdot)$ δύο σημείων του έτεκτεταμένου μιγαδικού έπιπέδου. [0.5]
β) Να υπολογίσετε την τιμή $\chi(2i, \infty) + 3\chi(i, \frac{1}{2})$. [0.5]
3. Να αποδείξετε ότι ένα υποσύνολο του μιγαδικού έπιπέδου είναι συμπαγές, αν και μόνο αν το ίδιο είναι κλειστό και φραγμένο. [1.5]
4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία του μιγαδικού έπιπέδου όπου η συνάρτηση με τύπο $f(z) := 2|z - i|^2 + |z + i|^2$ παραγωγίζεται [0.5] και, αν "ναι", να βρεθεί η παράγωγος σ' αυτά. [0.5]
5. Για κάθε φυσικό αριθμό n όρίζεται η καμπύλη γ_n με παραμετρική παράσταση $z_n(t) := i + \frac{1}{n}e^{2it}$, $t \in [0, \pi]$. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας

$$I_n := \int_{\gamma_n} \left(1 - \frac{2015i}{2016z}\right)^{-1} dz$$

και, αν "ναι", να το υπολογίσετε. [1.0]

6. α) Να δοθεί ο όρισμός του δείκτη στροφής μιας κλειστής καμπύλης ως προς ένα σημείο μή καίμενο πάνω σ' αυτή. [0.5]
β) Με βάση τόν όρισμό να αποδειχθεί, ότι αν γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο ένα σημείο a και ακτίνα $r > 0$, τότε ισχύει

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} = 1,$$

για κάθε σημείο $w \in B(a, r)$. [ΠΡΟΣΟΧΗ: ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΔΥΟ ΒΗΜΑΤΑ] [1.4]

7. Να προσδιορίσετε τόν συντελεστή a_3 του αναπτύγματος σε σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - i)^n$ της συνάρτησης με τύπο $f(z) := (z + 1)^{-1}e^{iz}$ στόν δίσκο $B(i, \sqrt[3]{2})$. [1.1]
8. Να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2 + 1)} dx. [1.4]$$